

# Superpositions de deux signaux sinusoïdaux

## 3

Dans ce chapitre on va envisager différentes situations où deux signaux sinusoïdaux se superposent. Il s'agira de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence, donnant le phénomène d'**interférences**. Puis on considérera deux signaux de fréquences voisines donnant le phénomène de **battements**. Enfin on étudiera un nouveau type d'onde, obtenu par superposition de deux ondes progressant en sens inverses, l'**onde stationnaire**.

## 1 Interférences entre deux ondes de même fréquence

### 1.1 Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence

Dans ce paragraphe on va s'intéresser au signal obtenu en faisant la somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence  $f$ , donc de même pulsation  $\omega = 2\pi f$ .

#### a) Expérimentation mathématique

On peut visualiser, à l'aide d'une calculatrice graphique, le signal  $s(t)$ , somme des signaux  $s_1(t) = 4 \cos(2\pi t)$  et  $s_2(t) = 3 \cos(2\pi t + \varphi)$  de même fréquence  $f = 1$  Hz, pour différentes valeurs de  $\varphi$ . On observe que  $s(t)$  est un signal sinusoïdal de fréquence 1 Hz, dont l'amplitude et la phase initiale dépendent de  $\varphi$ .

En particulier, on peut voir sur la figure 3.1 que :

- pour  $\varphi = 0$  l'amplitude est  $4 + 3 = 7$ ,
- pour  $\varphi = \pi/2$  l'amplitude est proche de 5,
- pour  $\varphi = \pi$  l'amplitude est  $4 - 3 = 1$ ,
- pour  $\varphi = 3\pi/2$  l'amplitude est proche de 5.

De plus, si l'on change le deuxième signal en  $s_2(t) = 4 \cos(2\pi t + \varphi)$ , signal de même amplitude que  $s_1(t)$ , on obtient, pour  $\varphi = \pi$ , un signal résultant  $s(t)$  nul.

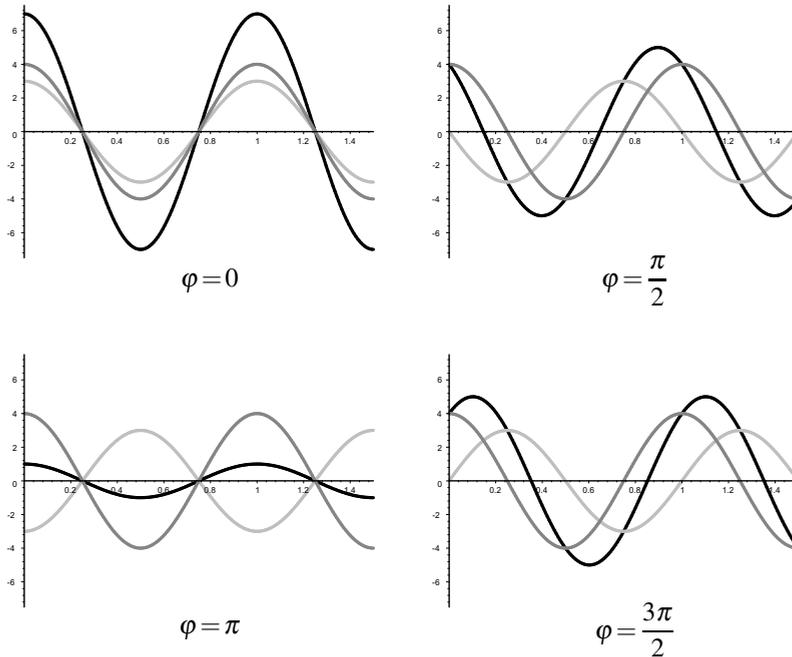


Figure 3.1 – Signaux  $s_1(t)$  (en gris foncé),  $s_2(t)$  (en gris clair) et  $s_1(t) + s_2(t)$  (en noir) pour différentes valeurs de  $\varphi$ .

**b) Calcul de l'amplitude du signal résultant**

Soit les deux signaux :  $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ . Quelle est l'amplitude du signal  $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$  ?

**Méthode analytique** On peut écrire le signal résultant sous la forme :

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= (A_1 \cos \varphi_1 \cos(\omega t) - A_1 \sin \varphi_1 \sin(\omega t)) + (A_2 \cos \varphi_2 \cos(\omega t) - A_2 \sin \varphi_2 \sin(\omega t)) \\ &= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos(\omega t) - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin(\omega t), \end{aligned}$$

en utilisant la formule de trigonométrie  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ . Il apparaît ainsi clairement qu'il s'agit d'un signal sinusoïdal de même pulsation (donc fréquence) que les deux signaux  $s_1$  et  $s_2$ . Son amplitude  $A$  est donnée par la formule 1.8 du chapitre 1 :

$$\begin{aligned} A^2 &= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2 \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

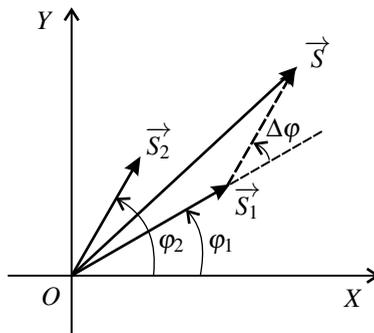
où on a utilisé la formule  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , ainsi que la même formule de trigonométrie que plus haut.

Le signal résultant de la superposition de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence, d'amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  et de phases initiales  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  est un signal sinusoïdal de même fréquence et d'amplitude donnée par la **formule des interférences** :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (3.1)$$

Cette amplitude n'est pas égale à la somme des amplitudes des deux signaux.

**Méthode géométrique (MPSI)** La formule (3.1) peut s'établir de manière élégante en utilisant la représentation des signaux sinusoïdaux par des vecteurs de Fresnel.



**Figure 3.2** – Addition des vecteurs de Fresnel correspondant à deux signaux sinusoïdaux de même fréquence. Les vecteurs sont représentés à l'instant  $t = 0$ .

La figure 3.2 représente les vecteurs  $\vec{S}_1$  et  $\vec{S}_2$  correspondant respectivement aux signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  (sur cette figure tous les vecteurs de Fresnel sont représentés à l'instant  $t = 0$ ). On se rappelle que les normes de ces vecteurs sont égales aux amplitudes des signaux :  $\|\vec{S}_1\| = A_1$  et  $\|\vec{S}_2\| = A_2$ .

On a représenté aussi le vecteur de Fresnel du signal somme  $s(t)$  :  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ .

 Pour dessiner  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ , il suffit de reproduire à partir de l'extrémité de  $\vec{S}_1$  la flèche représentant  $\vec{S}_2$  (même longueur et même direction).

L'amplitude  $A$  de  $s(t)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} A^2 &= \|\vec{S}\|^2 = \vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \\ &= \|\vec{S}_1\|^2 + \|\vec{S}_2\|^2 + 2\|\vec{S}_1\|\|\vec{S}_2\|\cos(\widehat{\vec{S}_1, \vec{S}_2}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi, \end{aligned}$$

où  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  est l'angle entre les vecteurs  $\vec{S}_1$  et  $\vec{S}_2$ . On retrouve bien la formule (3.1).

 Le calcul ci-dessus utilise différentes propriétés mathématiques du produit scalaire : bilinéarité, expression en fonction des normes et du cosinus de l'angle des vecteurs, égalité du carré scalaire et du carré de la norme. On trouvera plus de détails sur ces propriétés dans l'annexe mathématique.

### c) Maximum et minimum d'amplitude

Les amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  étant fixées, l'amplitude  $A$  est maximale lorsque  $\cos \Delta\varphi = 1$  soit lorsque  $\Delta\varphi = m \times 2\pi$  où  $m$  est un entier relatif.

L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est **maximale** lorsque les signaux sont **en phase**.

La valeur maximale de  $A$  est :

$$A_{\max} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} \quad \text{soit} \quad A_{\max} = A_1 + A_2.$$

Ce résultat se voit bien sur la figure 3.1 lorsque les deux sinusoïdes sont en phase, ainsi que sur la figure 3.2 puisque dans ce cas les deux vecteurs de Fresnel sont colinéaires et de même sens.

$A$  est minimale lorsque  $\cos \Delta\varphi = -1$  soit lorsque  $\Delta\varphi = \pi + m \times 2\pi$  où  $m$  est un entier relatif.

L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est **minimale** lorsque les signaux sont **en opposition de phase**.

La valeur minimale de  $A$  est :

$$A_{\min} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} \quad \text{soit} \quad A_{\min} = |A_1 - A_2|.$$

Ce résultat se voit bien sur la figure 3.1 lorsque les deux sinusoïdes sont en opposition de phase, ainsi que sur la figure 3.2 puisque dans ce cas les deux vecteurs de Fresnel sont colinéaires et de sens opposés.

#### d) Cas de deux ondes de même amplitude

Dans le cas où les deux ondes ont des amplitudes égales, la formule (3.1) devient :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_1^2 + 2A_1^2 \cos \Delta\phi} = A_1 \sqrt{2 + 2 \cos \Delta\phi} = 2A_1 \left| \cos \frac{\Delta\phi}{2} \right|,$$

en utilisant la formule :  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$  (voir appendice mathématique).

Les valeurs maximale et minimale de  $A$  sont dans ce cas :

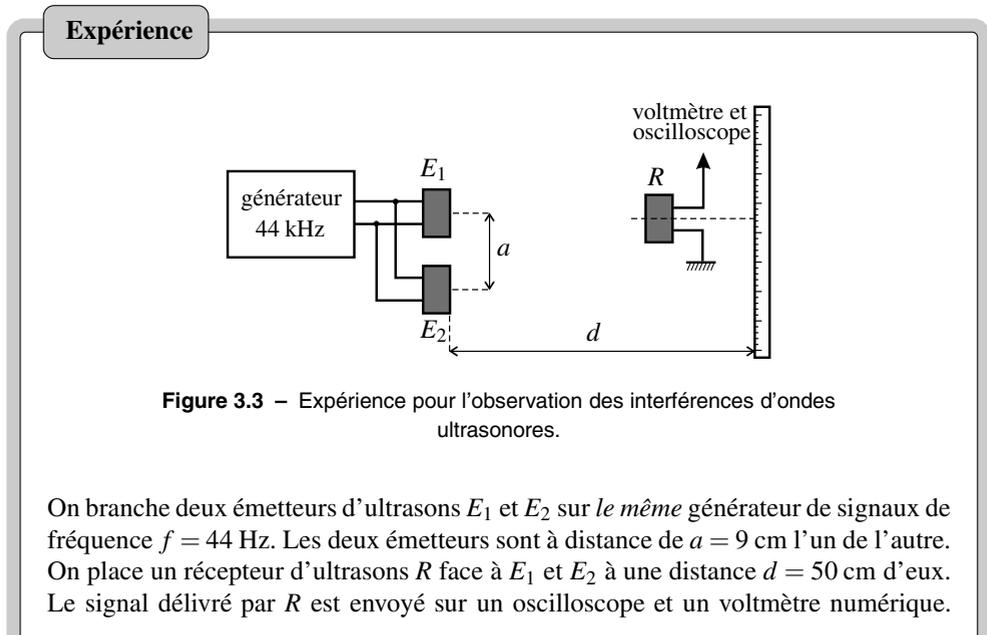
$$A_{\max} = 2A_1 \quad \text{et} \quad A_{\min} = 0.$$

Ainsi la superposition de deux ondes en opposition de phase peut donner un signal nul. Ceci est utilisé pour les isolations phoniques actives de certains casques. Un dispositif capte le bruit ambiant et envoie dans l'oreille un signal exactement en opposition de phase qui annule ce bruit.

## 1.2 Phénomène d'interférences

Lorsque deux ondes de même nature et de même fréquence parviennent en un point elles se superposent : leurs signaux s'additionnent. Cependant leur amplitudes ne s'additionnent pas. En effet, le calcul du paragraphe précédent a montré que l'amplitude du signal résultant dépend du déphasage  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  entre les deux signaux. Or ce déphasage varie d'un point à un autre. L'onde résultante a alors une amplitude modulée dans l'espace. C'est le **phénomène d'interférences** que l'on va étudier dans ce paragraphe.

### a) Observation expérimentale.



Lorsqu'on déplace  $R$  parallèlement à la droite reliant les deux émetteurs, l'amplitude du signal sinusoïdal observé sur l'oscilloscope varie, de même que l'indication du multimètre qui est égale à sa valeur efficace  $V_{\text{eff}}$  (c'est-à-dire son amplitude divisée par  $\sqrt{2}$ , voir le chapitre sur le régime harmonique).

Sur la figure 3.4 on voit la courbe donnant  $V_{\text{eff}}$  en fonction de la position  $x$  du récepteur mesurée le long d'une règle.

On observe une variation alternée de l'amplitude du signal qui est caractéristique du phénomène d'interférences.

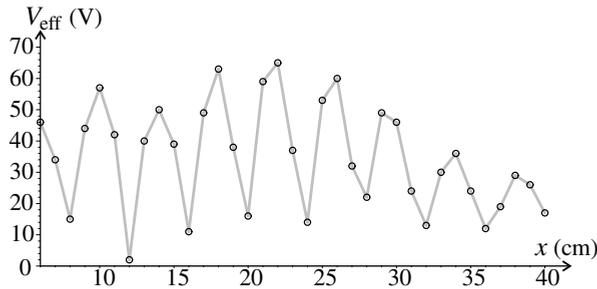


Figure 3.4 – Valeur efficace en fonction de la position du récepteur  $R$ .

### b) Interprétation de l'expérience

Les signaux émis par  $E_1$  et  $E_2$  sont identiques puisqu'ils sont reliés au même générateur et peuvent s'écrire :

$$s_1(0, t) = s_2(0, t) = A_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

en choisissant l'origine des temps pour que la phase initiale de ces signaux soit nulle.

On note  $d_1$  la distance entre  $E_1$  et  $R$  et  $d_2$  la distance entre  $E_2$  et  $R$ . Si l'émetteur  $E_1$  était seul,  $R$  recevrait le signal :

$$s_1(d_1, t) = A_1 \cos\left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right)\right)$$

où  $A_1$  est une amplitude inférieure à  $A_0$  (on peut vérifier expérimentalement que cette amplitude est inversement proportionnelle à  $d_1$ ). La phase initiale de ce signal est :  $\varphi_1 = -\frac{2\pi d_1}{\lambda}$ .

De même si  $E_2$  était seul,  $R$  recevrait :

$$s_2(d_2, t) = A_2 \cos\left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)\right).$$

La phase initiale de ce signal est :  $\varphi_2 = -\frac{2\pi d_2}{\lambda}$ .

Ainsi  $R$  reçoit les deux signaux qui sont déphasés de :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda}.$$

Ce déphasage dépend de  $d_1 - d_2$ , donc de la position du récepteur par rapport aux deux émetteurs. L'amplitude détectée qui est déterminée par  $\Delta\varphi$  selon la formule des interférences (3.1) en dépend donc aussi.

**c) Interférences constructive et destructrice**

L'amplitude détectée est maximale lorsque les signaux des ondes des deux émetteurs sont en phase. On dit alors qu'il y a **interférence constructive**. C'est le cas si :

$$\Delta\varphi = 2m\pi \quad \text{soit} \quad d_1 - d_2 = m\lambda$$

où  $m$  est un entier relatif.

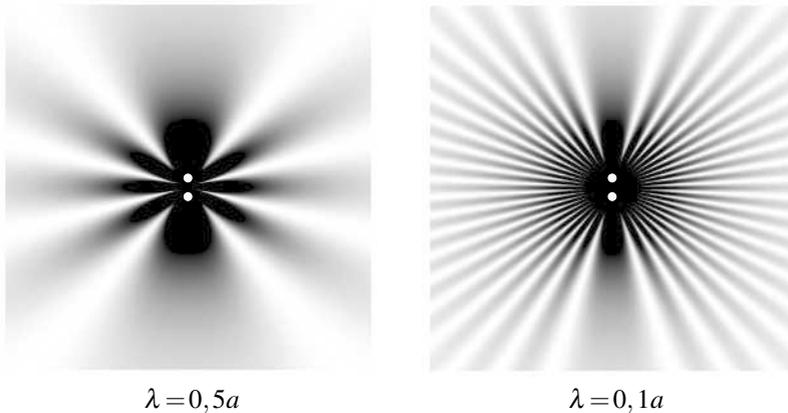
L'amplitude du signal détecté est minimale lorsque les signaux des ondes des deux émetteurs sont en opposition de phase. On dit alors qu'il y a **interférence destructrice**. C'est le cas si :

$$\Delta\varphi = (2m + 1)\pi \quad \text{soit} \quad d_1 - d_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

où  $m$  est un entier relatif.

**d) Échelle angulaire du phénomène d'interférences**

La figure 3.5 présente une simulation numérique des interférences entre deux sources ponctuelles. On constate que l'amplitude de l'onde résultante à grande distance dépend essentiellement de la position angulaire.



**Figure 3.5** – Simulation d'interférences entre les ondes issues de deux sources ponctuelles (points blancs) en phase et distantes de  $a$ , pour deux valeurs différentes de la longueur d'onde. Le gris est d'autant plus foncé que l'amplitude de l'onde résultante est grande.

Quelle est l'échelle angulaire du phénomène d'interférences ? Pour la trouver on peut faire un calcul en s'appuyant sur la figure 3.6. Sur cette figure,  $O$  est le milieu du segment  $E_1E_2$  et

( $Ox$ ) un axe orthogonal à  $E_1E_2$ . On repère la position  $R$  du récepteur par  $d = OR$  et l'angle  $\theta$  entre ( $Ox$ ) et le vecteur  $\overrightarrow{OR}$ .

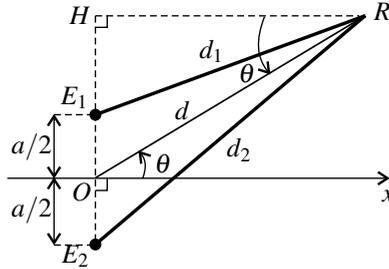


Figure 3.6 – Calcul de  $d_2 - d_1$  en fonction de la position angulaire.

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $R$  sur la droite  $E_1E_2$ . On retrouve l'angle  $\theta$  dans le triangle rectangle  $ORH$  par la propriété des angles alterne-interne, ce qui permet de trouver que :

$$OH = OR \sin \theta = d \sin \theta.$$

On peut écrire ensuite, grâce au théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} d_2^2 - d_1^2 &= E_2R^2 - E_1R^2 = (E_2H^2 + HR^2) - (E_1H^2 + HR^2) \\ &= E_2H^2 - E_1H^2 = \left(d \sin \theta + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(d \sin \theta - \frac{a}{2}\right)^2 = 2ad \sin \theta. \end{aligned}$$

D'autre part :  $d_2^2 - d_1^2 = (d_2 + d_1)(d_2 - d_1)$ . Et si la distance entre le récepteur et les émetteurs est très grande devant la distance entre les émetteurs, soit si  $d \gg a$ , on peut écrire :  $d_1 + d_2 \simeq 2d$ . Pour s'en convaincre on peut remarquer que l'égalité est rigoureuse si  $\theta = \frac{\pi}{2}$

et que, pour  $\theta = 0$ ,  $d_1 + d_2 = 2\sqrt{d^2 + \frac{a^2}{4}} = 2d\sqrt{1 + \frac{a^2}{d^2}} \simeq 2d$  au premier ordre en  $\frac{a}{d} \ll 1$ .

On a ainsi :

$$d_2^2 - d_1^2 \simeq 2d(d_2 - d_1)$$

En comparant les deux expressions de  $d_2^2 - d_1^2$  on trouve :

$$d_2 - d_1 \simeq a \sin \theta.$$

On a interférence constructive si :

$$d_2 - d_1 = n\lambda \quad \text{soit si} \quad \sin \theta = n \frac{\lambda}{a},$$

avec  $n$  entier. Ainsi, l'échelle angulaire du phénomène d'interférence, à grande distance de deux émetteurs séparés d'une distance  $a$  est l'angle  $\theta_i$  tel que :

$$\sin \theta_i = \frac{\lambda}{a}. \tag{3.2}$$

On remarquera que  $\theta_i$  diminue si la longueur d'onde diminue, ce qui est bien visible sur la figure 3.5.

### e) Échelle de longueur du phénomène d'interférences

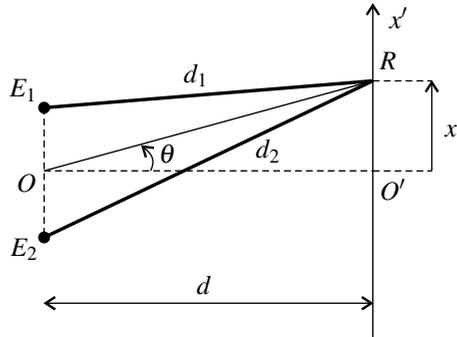


Figure 3.7 – Géométrie de l'expérience du paragraphe a)

Dans l'expérience du paragraphe a), on déplace le récepteur le long d'un axe ( $O'x'$ ) parallèle à la droite  $E_1E_2$ . Il apparaît sur la courbe tracée une distance caractéristique de variation de l'ordre de 5 cm. Peut-on retrouver théoriquement cette distance ?

Sur la figure, 3.7 on remarque que  $\tan \theta = \frac{x'}{d}$ . On peut donc écrire, pour  $x$  petit devant  $d$ , donc  $\theta$  petit :

$$\theta \simeq \frac{x'}{d}.$$

Ainsi, la distance caractéristique du phénomène d'interférence sur l'axe ( $O'x'$ ) est :

$$\ell_i = d\theta_i = \frac{\lambda d}{a}. \quad (3.3)$$

On notera que  $\ell_i$  diminue avec l'écartement  $a$  des sources et augmente avec la longueur d'onde et lorsqu'on s'éloigne des sources.

Dans l'expérience précédente on avait  $\lambda \sim 1$  cm,  $a = 9$  cm et  $d = 50$  cm ; la formule donne donc  $\ell \sim 5$  cm ce qui est bien l'ordre de grandeur de la distance entre deux maxima successifs.



La valeur de  $\ell_i$  ou  $\theta_i$  suivant le cas est importante lorsqu'on souhaite observer les interférences. Il faut choisir les paramètres de l'expérience de façon que l'on puisse observer plusieurs maxima et minima d'amplitude en déplaçant le récepteur. Pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée, il faut bien choisir l'écartement  $a$  entre les deux émetteurs.

## 2 Ondes stationnaires et modes propres

### 2.1 Superposition de deux ondes progressives de même amplitude

Dans les deux paragraphes précédents on a considéré différents cas de superposition de signaux sinusoïdaux sans référence à leur dépendance spatiale (signaux pris en un point donné). Dans ce paragraphe, on va étudier la superposition, dans tout l'espace, de deux ondes de même fréquence et même amplitude, se propageant en sens inverse. Ces deux ondes progressives s'écrivent :

$$s_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \quad \text{et} \quad s_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2),$$

avec  $k = \frac{\omega}{c}$ . Elles se propagent le long de l'axe ( $Ox$ ) en sens opposés.

En utilisant la formule de trigonométrie  $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$  (voir appendice mathématique) qui transforme une somme de cosinus en un produit, on peut écrire l'onde qui résulte de la superposition de ces deux ondes,  $s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t)$ , sous la forme :

$$\begin{aligned} s(x, t) &= A \cos(\omega t - kx + \varphi_1) + A \cos(\omega t + kx + \varphi_2) \\ &= 2A \cos\left(kx + \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)\right) \times \cos\left(\omega t + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right). \end{aligned}$$

Cette expression mathématique montre que l'onde  $s(x, t)$  est de nature totalement différente des ondes  $s_1(x, t)$  et  $s_2(x, t)$ . En effet, on n'a plus la combinaison linéaire  $\omega t - kx$  ou  $\omega t + kx$  qui traduit la propagation d'une onde, mais au contraire une *séparation* de la variable spatiale  $x$  et de la variable temporelle  $t$ . Une telle onde ne se propage pas, mais vibre sur place et elle est appelée **onde stationnaire**.

### 2.2 Onde stationnaire

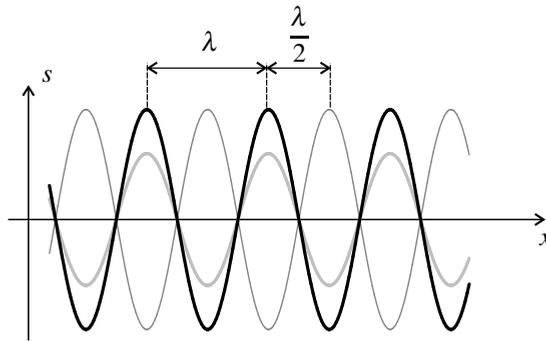
#### a) Définition

Une **onde stationnaire** harmonique est une onde de la forme :

$$s(x, t) = 2A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi), \quad (3.4)$$

avec  $k = \frac{\omega}{c}$ , où  $c$  est la célérité des ondes progressives de même nature physique. Elle est égale à la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de pulsation  $\omega$  se propageant en sens inverse le long de l'axe ( $Ox$ ), ayant la même amplitude  $A$ .

La figure 3.8 représente  $s(x, t)$  en fonction de  $x$  à différents instants. Il est intéressant de la comparer avec la figure 2.14 du chapitre précédent. On constate que cette onde ne se propage pas d'où le qualificatif de stationnaire.



**Figure 3.8** – Onde stationnaire à trois instants différents :  $t_1$  (en noir),  $t_2$  (en gris clair) et  $t_3 = t_1 + \frac{T}{2}$  (en gris foncé, trait fin).

### b) Nœuds et ventres de vibration

L'amplitude de l'onde (3.4) dépend de la position  $x$  (alors que ce n'est pas le cas pour une onde progressive) et elle est donnée par :

$$\mathcal{A}(x) = |2A \cos(kx + \psi)|.$$

On constate sur la figure 3.8 qu'il existe des points pour lesquels l'onde stationnaire est nulle à chaque instant. Ces points sont appelés les **nœuds de vibration**. Ce sont les points pour lesquels  $\mathcal{A}(x) = 0$  ; leurs abscisses  $x$  vérifient :

$$\begin{aligned} \cos(kx + \psi) = 0 &\iff kx + \psi = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ avec } n \text{ entier} \\ &\iff x = -\frac{\psi}{k} + \frac{\pi}{2k} + n\frac{\pi}{k}, \text{ avec } n \text{ entier} \\ &\iff x = -\frac{\psi}{k} + \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}, \text{ avec } n \text{ entier,} \end{aligned}$$

puisque  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . Les nœuds de vibrations sont donc régulièrement espacés et la distance entre deux nœuds consécutifs est  $\frac{\lambda}{2}$ .

Il existe aussi des points en lesquels l'amplitude  $\mathcal{A}(x)$  de l'onde stationnaire est maximale. Ces points sont appelés les **ventres de vibration**. Ce sont les points pour lesquels  $\mathcal{A}(x) = 2A$  ; leurs abscisses  $x$  vérifient :

$$\begin{aligned} \cos(kx + \psi) = \pm 1 &\iff kx + \psi = n\pi, \text{ avec } n \text{ entier} \\ &\iff x = -\frac{\psi}{k} + n\frac{\pi}{k}, \text{ avec } n \text{ entier} \\ &\iff x = -\frac{\psi}{k} + n\frac{\lambda}{2}, \text{ avec } n \text{ entier.} \end{aligned}$$

Les ventres de vibration sont donc régulièrement espacés et la distance entre deux ventres

consécutifs est  $\frac{\lambda}{2}$ . De plus, le milieu de deux nœuds de vibrations consécutifs est un ventre de vibration et vice-versa. Tout ceci est visible sur la figure 3.8.

Les **nœuds de vibration** sont les points où la vibration s'annule quelle que soit la date  $t$ .

Les **ventres de vibration**, sont les points où l'amplitude de la vibration est maximale. Les nœuds et les ventres sont disposés de manière alternée. La distance entre un nœud et un ventre consécutifs est  $\frac{\lambda}{4}$ . La distance entre deux nœuds ou de ventres consécutifs est  $\frac{\lambda}{2}$ .

L'existence de nœuds et de ventres de vibration est une **propriété caractéristique** des ondes stationnaires.

### c) Phase initiale de l'onde stationnaire

L'onde stationnaire (3.4) peut s'écrire :

- si  $\cos(kx + \psi) > 0$ ,  $s(x, t) = \mathcal{A}(x) \cos(\omega t + \varphi)$ ,
- si  $\cos(kx + \psi) < 0$ ,  $s(x, t) = -\mathcal{A}(x) \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{A}(x) \cos(\omega t + \varphi + \pi)$ .

Ainsi, la phase initiale de l'onde stationnaire ne prend que deux valeurs,  $\varphi$  et  $\varphi + \pi$ . Les vibrations en deux points sont soit en phase, soit en opposition de phase.

Entre deux nœuds, l'ensemble des points vibrent en phase. Lorsqu'on passe un nœud, la phase change de  $\pi$ . On peut observer tout ceci sur la figure 3.8.

## 2.3 Expérience de la corde de Melde

Le dispositif de la **corde de Melde** est un dispositif classique permettant d'observer des ondes stationnaires le long d'une corde. L'onde est ici observable à l'œil nu, puisqu'il s'agit d'un déplacement latéral de la corde de l'ordre de quelques centimètres. Toutefois, le phénomène étant oscillatoire et très rapide on utilise la technique de la stroboscopie pour le ralentir en apparence et pouvoir le regarder en direct.

### a) Dispositif expérimental

On tend une corde horizontale d'environ 2 mètres de longueur entre la lame d'un vibreur et une poulie (figure 3.9). La tension de la corde est déterminée par la masse  $m$  que l'on accroche à l'extrémité pendante : si la poulie est sans frottement et que la masse est immobile elle est égale en norme à  $mg$ . En déplaçant la poulie on peut faire varier la longueur utile  $L$  de la corde entre, en gros, 1,5 m et 2 m.

Le vibreur est alimenté par un générateur de basses fréquences (GBF) et il impose à l'extrémité de la corde un mouvement sinusoïdal d'amplitude de l'ordre de quelques millimètres et dont la fréquence  $f$  se règle sur le GBF.

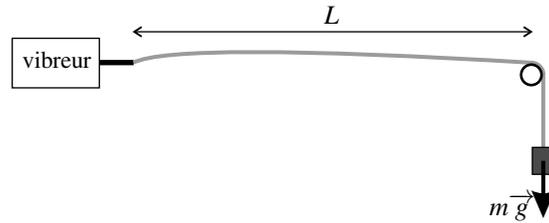


Figure 3.9 – Corde de Melde.

### b) Phénomène de résonance

**Observation expérimentale** Lorsqu'on augmente progressivement  $f$ , on constate que la corde prend, pour certaines fréquences particulières, un mouvement d'amplitude très supérieure à l'amplitude du vibreur, pouvant valoir une dizaine de centimètres. On dit que la corde entre en **résonance** pour ces fréquences particulières.

L'aspect de la corde aux différentes résonances est donné sur la figure 3.10 :

- Pour la plus petite fréquence de résonance  $f_1$ , la corde présente l'aspect d'un fuseau. Ce fuseau est la superposition, due à la persistance rétinienne, des différentes formes de la corde au cours du temps. L'amplitude de vibration est maximale au milieu de la corde et quasiment nulle aux deux extrémités (au niveau du vibreur l'amplitude n'est pas nulle, mais beaucoup plus petite que l'amplitude maximale). On observe ainsi un ventre de vibration au centre de la corde et des nœuds à ses extrémités *ce qui prouve que l'onde sur la corde est stationnaire*.
- La deuxième fréquence de résonance est  $f_2 \simeq 2f_1$ . La corde forme alors deux fuseaux de longueur  $\frac{L}{2}$ . On a deux ventres de vibrations et trois nœuds de vibration (un au milieu de la corde et deux aux extrémités).
- Les fréquences de résonance suivantes sont  $f_3 \simeq 3f_1$ ,  $f_4 \simeq 4f_1$  etc. L'onde forme de plus en plus de fuseaux : pour la fréquence  $f_n$  on a  $n$  fuseaux de longueur  $\frac{L}{n}$ , donc  $n$  ventres de vibrations et  $n + 1$  nœuds (dont les deux extrémités).

**Fréquences de résonance** On peut exprimer les fréquences  $f_n$  de résonance de la corde. On sait que la distance entre deux nœuds de vibration consécutifs d'une onde stationnaire est égale à  $\frac{\lambda}{2}$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde. C'est la longueur d'un fuseau.

Lorsque la corde forme  $n$  fuseaux on a :

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{soit} \quad \lambda = \lambda_n = \frac{2L}{n}. \quad (3.5)$$

On en déduit la fréquence  $f_n$  de l'onde :

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}.$$

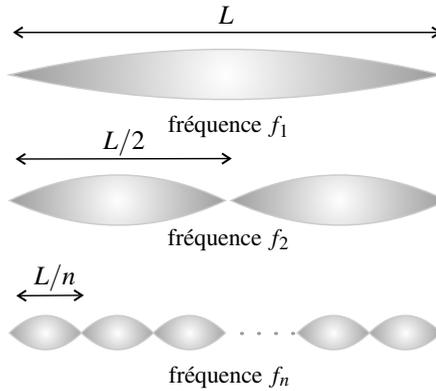


Figure 3.10 – Aspect de la corde pour les différentes fréquences de résonance.

On a ainsi trouvé l’expression théorique des fréquences de résonance de la corde :

$$f_n = n f_1 \quad \text{où} \quad f_1 = \frac{c}{2L} . \quad (3.6)$$



Ces expressions sont à connaître, mais le plus simple est de retenir l’aspect de la figure 3.10 et le raisonnement qui permet de les obtenir.

**Vérification expérimentale** On connaît l’expression de la célérité des ondes transversales sur la corde :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} ,$$

où  $T$  est la tension de la corde et  $\mu$  sa masse linéique (remarquer qu’il est intuitif que  $c$  augmente avec  $T$  et diminue lorsque  $\mu$  soit l’inertie de la corde augmente). Dans l’expérience de Melde  $T$  est égale à  $mg$  où  $m$  est la masse qui est suspendue à l’extrémité de la corde. La masse linéique de la corde est facile à mesurer : il suffit de déterminer sa masse  $m'$  par pesée et de mesurer sa longueur totale  $L'$  (supérieure à la longueur utile  $L$ ), alors :  $\mu = \frac{m'}{L'}$ . On peut alors calculer  $f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{m}{m'} g L'}$  et comparer cette valeur théorique à la valeur mesurée.

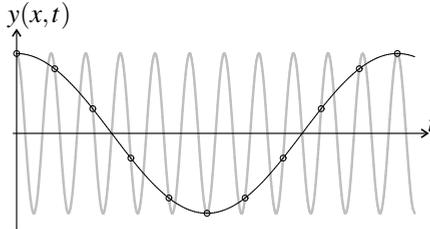
### c) Observation stroboscopique

L’observation stroboscopique permet de confirmer le caractère stationnaire de l’onde.

Un **stroboscope** est un dispositif fournissant un éclairage intermittent, composé de brefs éclairs régulièrement espacés d’une durée  $T_{\text{strobe}}$  qui est la période du stroboscope.

Lorsque la corde est éclairé par le stroboscope, on la voit à des instants  $t_i = t_0 + i T_{\text{strobe}}$  où  $i$  est un entier . Si  $T_{\text{strobe}}$  est égale à la période de vibration de la corde, un point est toujours vu

dans la même position, donc la corde paraît fixe. Si  $T_{\text{strobe}}$  est légèrement plus grande, chaque point a « un peu » bougé entre deux éclairs ce qui fait qu'on voit un mouvement ralenti. Ceci est illustré sur la figure 3.11.



**Figure 3.11** – Observation stroboscopique d'un mouvement sinusoïdal avec  $T_{\text{strobe}}$  légèrement supérieure à la période du mouvement : la courbe en gris représente le mouvement réel, les cercles donnent les instants  $t_i$  de visualisation, la courbe en noir représente le mouvement apparent.

En réglant le stroboscope pour avoir un mouvement ralenti (il suffit de le régler sur une fréquence d'éclairage légèrement différente de la fréquence sur laquelle le GBF est réglé) on observe que :

- les extrémités des fuseaux sont des points immobiles,
- à l'intérieur d'un fuseau, les points de la corde vibrent tous en phase,
- deux points situés dans deux fuseaux voisins vibrent en opposition de phase.

Ces observations correspondent bien à une onde stationnaire.

#### d) Interprétation physique

Pourquoi a-t-on une onde stationnaire sur la corde ? Pourquoi son amplitude est-elle très supérieure à l'amplitude de vibration du vibreur ?

Le vibreur envoie dans la corde une onde progressive qui se propage en direction de la poulie. Cette onde se réfléchit sur l'extrémité de la corde en contact avec la poulie, ce qui donne naissance à une deuxième onde se propageant en sens inverse. Cette deuxième onde se réfléchit sur l'autre extrémité de la corde liée au vibreur, donnant naissance à une troisième onde se propageant dans le même sens que la première, qui se réfléchit sur la poulie, donnant une quatrième onde et ainsi de suite...

L'onde stationnaire le long de la corde résulte de la superposition de ces ondes progressives se propageant dans les deux sens. Son amplitude peut être très supérieure à l'amplitude du vibreur puisqu'il y a *superposition d'un grand nombre d'ondes réfléchies successives*.

Pourquoi l'amplitude de vibration de la corde est-elle maximale pour les fréquences  $f_n$  ?

Ceci résulte de la condition d'interférence constructive. En effet, il y a entre deux ondes successives se propageant dans le même sens (la première et la troisième onde ci-dessus, ou la deuxième et la quatrième, par exemple) un décalage dans le temps correspondant à la durée d'un aller-retour le long de la corde soit  $\tau = \frac{2L}{c}$ . Ces ondes ont donc en tout point un

déphasage  $\Delta\varphi$  donné par :

$$\Delta\varphi = \omega\tau = \frac{2\omega L}{c} = 2kL.$$

L'interférence entre ces deux ondes est constructive et l'amplitude résultant est maximale si  $\Delta\varphi$  est un multiple entier de  $2\pi$ , soit si :

$$2kL = 2\frac{2\pi}{\lambda}L = 2n\pi \iff \lambda = \frac{2L}{n}.$$

On retrouve ainsi la relation (3.5).

Il se propage le long de la corde un très grand nombre d'ondes provenant des réflexions aux deux extrémités.

Les fréquences de résonance sont celles pour lesquelles il y a *interférence constructive* entre les ondes se propageant dans le même sens.

La superposition entre les ondes se propageant dans les deux sens donne une onde stationnaire.

## 2.4 Modes propres

On s'intéresse maintenant aux vibrations d'une corde de longueur  $L$  finie, fixée entre deux points (il s'agit par exemple d'une corde de guitare). Ces vibrations sont des superpositions de vibrations sinusoïdales appelés **modes propres**.

### a) Ondes stationnaires sur une corde de longueur $L$ finie

Dans ce paragraphe on recherche les ondes stationnaires pouvant exister sur une corde de longueur  $L$  dont les extrémités sont fixes.

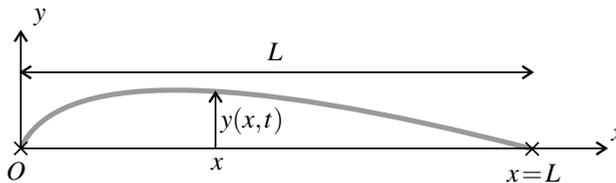


Figure 3.12 – Corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

On prend un axe  $(Ox)$  le long de la corde, les deux extrémités fixes de la corde étant en  $x = 0$  et  $x = L$  (figure 3.12). On suppose que la corde reste comprise dans le plan  $(Oxy)$  et on appelle  $y(x,t)$  le déplacement, supposé transversal, du point de la corde d'abscisse  $x$ . Les conditions physiques de fixation de la corde en ses extrémités se traduisent mathématiquement par les **conditions aux limites** :

$$y(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad y(L,t) = 0.$$

On cherche une onde stationnaire  $y(x, t)$  de la forme (3.4) :

$$y(x, t) = 2A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi),$$

avec  $k = \frac{\omega}{c}$ . Les conditions aux limites ci-dessus imposent que les deux extrémités de la corde soient des nœuds de vibration, soit :

$$\cos(\psi) = 0 \quad \text{et} \quad \cos(kL + \psi) = 0.$$

On ne réduit pas la généralité du calcul en supposant que  $\psi$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ . La première condition impose  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Du fait que  $\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(kx)$ , le changement de  $\psi = -\frac{\pi}{2}$  en  $\psi = \frac{\pi}{2}$  revient à une inversion du signe de  $\cos(kx + \psi)$  que l'on peut compenser en changeant  $\varphi$  en  $\varphi + \pi$ . Ainsi, sans perte de généralité, on prendra :  $\psi = -\frac{\pi}{2}$  de sorte que :  $\cos(kx + \psi) = \sin(kx)$ .

La condition  $\cos(kL + \psi) = \sin(kL) = 0$  devient alors  $kL = n\pi$ . Les valeurs possibles de  $k$  sont donc :

$$k_n = n \frac{\pi}{L}, \quad \text{où } n \text{ est un entier.}$$

On en déduit les valeurs possibles de la pulsation  $\omega$ , en notant  $c$  la célérité des ondes se propageant le long de la corde :

$$\omega_n = ck_n = n \frac{\pi c}{L}, \quad \text{où } n \text{ est un entier.}$$

Les ondes stationnaires pouvant exister sur une corde de longueur  $L$  fixée en ses extrémités sont :

$$y(x, t) = A \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi\right) \quad (3.7)$$

où  $n$  est un entier, et  $A$  et  $\varphi$  des constantes quelconques.

Ce sont les **modes propres** de vibration de la corde. Les fréquences des modes propres, appelées **fréquences propres**, sont :

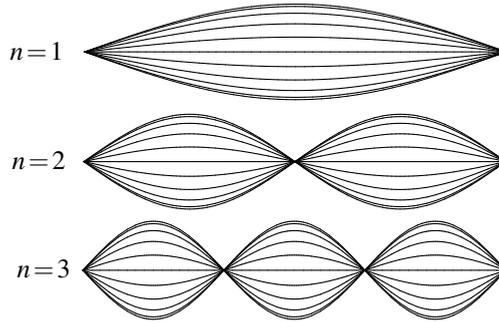
$$f_n = n \frac{c}{2L}.$$

Les longueurs d'ondes correspondantes,

$$\lambda_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n},$$

sont les sous-multiples entiers de  $2L$ .

L'aspect de la corde pour les premiers modes propres est représenté sur la figure 3.13. Le mode propre d'ordre  $n$  a  $n + 1$  nœuds de vibrations qui sont les deux extrémités de la corde et  $n - 1$  autres nœuds.



**Figure 3.13** – Les trois premiers modes propres d'une corde fixée à ses deux extrémités.

**Exemple**

Les cordes d'une guitare sont en acier de masse volumique  $\rho = 7,87 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . La corde la plus aiguë a un diamètre  $\Phi = 3,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  et une longueur  $L = 64,0 \text{ cm}$ . Elle est tendue avec une tension  $T = 100 \text{ N}$ .

La masse linéique de la corde est  $\mu = \frac{1}{4} \rho \pi \Phi^2$  et la célérité des ondes sur cette corde est :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{\rho \pi (\Phi^2/4)}} = 424 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

La longueur d'onde du mode fondamental de la corde est :  $\lambda_1 = 2L = 1,28 \text{ m}$  et sa fréquence fondamentale :

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{424}{1,28} = 331 \text{ Hz}$$

(pour les lecteurs musiciens, il s'agit d'un mi3).

**b) Mouvement général de la corde**

Les modes propres sont les vibrations sinusoïdales de la corde. Le mouvement le plus général de la corde n'est pas sinusoïdal, mais c'est une superposition des différents modes propres.

Le mouvement le plus général de la corde est obtenu par **superposition linéaire** de tous ses modes propres, soit :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi_n\right)$$

où les  $A_n$  et  $\varphi_n$  sont des constantes quelconques.

Comme les modes propres ont des fréquences toutes multiples de  $f_1 = \frac{c}{2L}$ , le mouvement est

périodique de fréquence  $f_1$ .

Les amplitudes  $A_n$  et les phases initiales  $\varphi_n$  dépendent des conditions initiales du mouvement. On peut choisir ces conditions de manière à changer le poids des différents modes. Par exemple en imposant un déplacement initial grand là où un mode présente un nœud de vibration on défavorise ce mode qui aura une amplitude faible.

La vibration d'une corde d'instrument de musique est ainsi une superposition de vibrations sinusoïdales de toutes les fréquences propres de la corde. Le son émis contient aussi toutes ces fréquences. C'est un signal périodique non sinusoïdal dont le fondamental a la fréquence  $f_1 = \frac{c}{2L}$  et les harmoniques les fréquences  $f_n = nf_1$ . Si  $L$  augmente, la fréquence  $f_1$  diminue, et le son produit est plus grave. C'est un fait bien connu : les cordes d'une contrebasse sont plus longues que celles d'un violon.

### SYNTHÈSE

#### SAVOIRS

- formule des interférences
- conditions pour avoir une amplitude maximale ou minimale
- formule d'une onde stationnaire
- distances entre nœuds et ventres de vibrations
- fréquence des modes propres en fonction de la longueur de la corde et de la célérité
- mouvement général de la corde comme superposition de modes propres

#### SAVOIR-FAIRE

- additionner deux signaux sinusoïdaux de même fréquence par le calcul analytique ou les vecteurs de Fresnel (MPSI)
- exprimer les conditions d'interférences constructrices ou destructrices
- décrire une onde stationnaire
- caractériser l'onde stationnaire par l'existence de nœuds et de ventres
- retrouver rapidement les fréquences des modes propres

#### MOTS-CLÉS

- |                             |                             |                  |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------|
| • superposition             | • interférence destructrice | • corde de Melde |
| • déphasage                 | • onde stationnaire         | • mode propre    |
| • interférence constructive | • nœud, ventre              |                  |